

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系(练习)

一、一元二次方程的判别式

练习

1. 已知一元二次方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ，它的根的情况是（ ）。
- A. 两个不相等的实数根 B. 一个实数根
C. 无实根 D. 两个相等的实数根

【答案】D

【解析】 $\because \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ ，
 $\therefore$ 方程有两个相等的实数根。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

2. 一元二次方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 的根的情况是（ ）。
- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 没有实数根 D. 无法确定

【答案】B

【解析】 $\because$ 在方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 中， $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$ ，
 $\therefore$ 方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

3. 下列所给方程中，没有实数根的是（ ）。
- A. $x^2 + x = 0$ B. $5x^2 - 4x - 1 = 0$ C. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ D. $4x^2 - 5x + 2 = 0$

【答案】D

【解析】在D选项中 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 2 = -7 < 0$ ，方程无解。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

练习

4. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > 1$

【解析】 $\because$ 原方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2k)^2 - 4(k^2 - k + 1) = 4k - 4 > 0,$$

解得 $k > 1$;

故答案为： $k > 1$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

5. 若关于 x 的方程 $(k-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是().
- A. $k \geq 1$ B. $k > 1$ 且 $k \neq 2$ C. $k \leq 1$ D. $k \geq 1$ 且 $k \neq 2$

【答案】 A

【解析】 当该方程为一元二次方程时，有实数根，

$$\begin{cases} k-2 \neq 0 \\ \Delta = 2^2 - 4(k-2) \cdot (-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore k \geq 1 \text{ 且 } k \neq 2,$$

当该方程为一元一次方程时，必有实数根，

$$\text{则 } k-2 = 0, k = 2,$$

综上， k 的取值范围为 $k \geq 1$.

故选A.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

6. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是().
- A. $k > \frac{1}{2}$ B. $k \geq \frac{1}{2}$ C. $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$ D. $k \geq \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 有不相等实数根，

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4(k-1) \times (-2) > 0, \text{ 且 } k-1 \neq 0,$$

解得 $k > \frac{1}{2}$, 且 $k \neq 1$.

故选C .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

7. 若关于 x 的一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 则 m 的取值范围是 () .

A. $m > -\frac{1}{4}$ B. $m < -\frac{1}{4}$ C. $m \geq -\frac{1}{4}$ D. $m \leq -\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】 $\because$ 一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$,

$$\therefore \Delta > 0 ,$$

$$x^2 - 5x + 6 - m = 0 ,$$

$$\Delta = 25 - 4(6 - m)$$

$$= 1 + 4m > 0 ,$$

$$\therefore m > -\frac{1}{4} .$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

8. 若一元二次方程 $(k-1)x^2 - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{4} = 0$ 有两个实数根 , 则 k 的取值范围是 () .

A. $k \geq 1$ B. $k \leq 1$ C. $k > 1$ D. $k < 1$

【答案】D

【解析】当 $k = 1$ 时 , 原方程不成立 , 故 $k \neq 1$,

$$\therefore \text{方程 } (k-1)x^2 - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{4} = 0 \text{ 为一元二次方程 ,}$$

又此方程有两个实数根 ,

$$\therefore b^2 - 4ac = \left(-\sqrt{1-k}\right)^2 - 4 \times (k-1) \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 - k - (k-1)$$

$$= 2 - 2k \geq 0 ,$$

$$\therefore k \leq 1 , 1 - k > 0 ,$$

综上 : $k < 1$,

$\therefore$ 选D .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

9. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{m+3}x + m = 0$ 有两个实数根, 则 m 的取值范围是().
- A. $m \leq 1$ B. $m < 1$ C. $-3 \leq m \leq 1$ D. $-3 < m < 1$

【答案】C

【解析】根据题意知 $\Delta = (-\sqrt{m+3})^2 - 4 \times 1 \times m \geq 0$, $m+3-4m \geq 0$,
 $3m \leq 3$,
 $m \leq 1$,
同时 $m+3 \geq 0$,
 $m \geq -3$,
故 $-3 \leq m \leq 1$,
故选C.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

10. 有两个一元二次方程 $M: ax^2 + bx + c = 0$, $N: cx^2 + bx + a = 0$, 其中 $ac \neq 0$, $a \neq c$, 下列四个结论中正确的个数有().
- ①如果方程 M 有两个相等的实数根, 那么方程 N 没有实数根
②如果方程 M 的两根符号相同, 则方程 N 的两根符号也相同
③如果5是方程 M 的一个根, 那么5也是方程 N 的一个根
④如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根, 那么这个根必是 $x = 1$
- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【答案】D

【解析】①、如果方程 M 有两个相等的实数根,
那么 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 所以方程 N 也有两个相等的实数根,
结论错误, 不符合题意;
②、如果方程 M 的两根符号相同, 那么 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, $\frac{c}{a} > 0$,
所以 a 与 c 符号相同, $\frac{a}{c} > 0$,
所以方程 N 的两根符号也相同, 结论正确, 符合题意;
③、如果5是方程 M 的一个根, 那么 $25a + 5b + c = 0$,
两边同时乘以25, 得 $25c + 125b + 625a = 0$,
所以5不是方程 N 的一个根, 结论错误, 不符合题意;

④、如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根，
 那么 $ax^2 + bx + c = cx^2 + bx + a$ ， $(a - c)x^2 = a - c$ ，
 由 $a \neq c$ ，得 $x^2 = 1$ ， $x = \pm 1$ ，结论错误，不符合题意。
 故选D。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

练习

11. 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根。

【答案】 $m = 1$ ， $x_1 = x_2 = 1$ 。

【解析】 $a = 1$ ， $b = -2$ ， $c = 2m - 1$ ，
 由题意知 $\Delta = b^2 - 4ac = 8 - 8m \geq 0$ ，
 $\therefore m \leq 1$ ，
 $\therefore m$ 为正整数，
 $\therefore m = 1$ ，
 $\therefore$ 方程为 $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，
 $\therefore x_1 = x_2 = 1$ 。
 故答案为： $m = 1$ ， $x_1 = x_2 = 1$ 。

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

12. 已知关于 x 的方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$ 。

- (1) 求证：不论 a 取何实数，该方程都有两个不相等的实数根。
 (2) 若该方程的一个根为1，求 a 的值及该方程的另一根。

【答案】 (1) 证明见解析。

$$(2) a = \frac{1}{2}; x = -\frac{3}{2}.$$

【解析】 (1) $\because \Delta = a^2 - 4(a - 2)$
 $= a^2 - 4a + 8$
 $= a^2 - 4a + 4 + 4$
 $= (a - 2)^2 + 4 > 0$ ，
 $\therefore$ 不论 a 取何实数，该方程都有两个不相等的实数根；

(2) 将 $x = 1$ 代入方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$,
 得: $1 + a + a - 2 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$;
 方程为 $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$, 即 $2x^2 + x - 3 = 0$,
 设另一根为 x_1 , 则
 $1 \cdot x_1 = -\frac{3}{2}$,
 解得 $x_1 = -\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

13. 已知, 关于 x 的方程 $x^2 + 2(2 - k)x + 3 - 6k = 0$.

(1) 若 $x = 1$ 是方程的一个根, 求 k 的值及方程的另一根 .

(2) 若 k 为任意实数, 判断此时方程的根情况 .

【答案】 (1) $k = 1$, 方程的另一根为 -3 .

(2) 无论 k 取什么实数值, 此方程总有两个实数根 .

【解析】 (1) 把 $x = 1$ 代入方程有: $1 + 2(2 - k) + 3 - 6k = 0$,

解得 $k = 1$.

故方程为 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

设方程的另一个根是 x_2 ,

则: $1 \cdot x_2 = -3$,

解得 $x_2 = -3$.

故 $k = 1$, 方程的另一根为 -3 .

(2) $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2(2 - k)x + 3 - 6k = 0$ 中 ,

$$\Delta = 4(2 - k)^2 - 4(3 - 6k) = 4(k + 1)^2 \geq 0 ,$$

$\therefore$ 无论 k 取什么实数值, 此方程总有两个实数根 .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

14. 已知关于 x 的方程 $m^2x^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围 .

(2) 是否存在实数 m , 使方程的两个实数根互为相反数? 如果存在, 求出 m 的值; 如果不存在, 说明理由 .

【答案】 (1)

$$m < \frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0.$$

(2) 不存在, 证明见解析.

【解析】 (1) ①当 $m^2 = 0$, 即 $m = 0$ 时, 方程为 $-x + 1 = 0$, 无两个不相等实数根, 不符合条件;

②当 $m^2 \neq 0$, 即 $m \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程,

$$b^2 - 4ac = (2m - 1)^2 - 4m^2 > 0,$$

解得: $m < \frac{1}{4}$, 综合①②可得 $m < \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$.

(2) 不存在, 如果存在 x_1, x_2 互为相反数,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{m^2} = 0,$$

解得: $m = \frac{1}{2}$,

由(1)中结果知, 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $\Delta < 0$, 方程无实数根,

$\therefore$ 不存在 m 使方程的两实数根互为相反数.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习

15. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且关于 x 的方程 $x^2 + 2(a-b)x - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 $\triangle ABC$ 是 _____ 三角形.

【答案】 等腰直角

【解析】 $\because x^2 + 2(a-b)x - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [2(a-b)]^2 - 4 \times 1 \times [-(a^2 + b^2 - c^2)^2]$$

$$= 4(a-b)^2 + 4(a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= 0,$$

$$\therefore a-b=0, a^2+b^2-c^2=0,$$

$$\therefore a=b, a^2+b^2=c^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

【标注】【知识点】与等腰三角形结合

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$.

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

- (2) 若 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的长是这个方程的两个实数根，第三边 BC 的长为5. 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时，求 k 的值.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) k 的值为4或5.

【解析】 (1) $\Delta = [-(2k+1)]^2 - 4 \times 1 \times (k^2 + k) = 1$.

(2) $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0 \Rightarrow (x-k)[x-(k+1)] = 0$,

所以次方程的两个实数根为 $x_1 = k$, $x_2 = k+1$, 则可设 $AB = k$, $AC = k+1$.

① 若 BC 为底，则 $AB = AC$ ，即 $k = k+1$ ，此种情况无解；

② 若 AC 为底，则 $AB = BC$ ，即 $k = 5$ ；

③ 若 AB 为底，则 $AC = BC$ ，即 $k+1 = 5$ ，则 $k = 4$.

综上所述， k 的值为4或5.

【标注】【知识点】与等腰三角形结合

独步天下

17. 若关于 x 的一元二次方程 $2ax^2 - (a+4)x + 2 = 0$ 有一个正整数解，则正整数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1或2

【解析】 根据题意得 $a \neq 0$, $\Delta = (a+4)^2 - 16a = (a-4)^2$,

$$\therefore x = \frac{a+4 \pm \sqrt{(a+4)^2 - 16a}}{4a} = \frac{a+4 \pm (a-4)}{4a},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{a},$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $2ax^2 - (a+4)x + 2 = 0$ 有一个整数根，而 a 为正整数，

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2} \text{ 不符合题意, } x_2 = \frac{2}{a} \text{ 必为整数,}$$

$$\therefore a = 1 \text{ 或 } 2.$$

故答案为：1或2.

【标注】【知识点】整数根-分离常数法

18. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2 + 2x - a - 1 = 0$ 的根都是整数，那么符合条件的整数 a 有()个.

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】B

【解析】①当 $a = 1$ 时， $x = 1$ ；

②当 $a \neq 1$ 时，原式可以整理为： $[(a-1)x + a + 1](x-1) = 0$ ，

易知 $x = 1$ 是方程的一个整数根，

再由 $(a-1)x + a + 1 = 0$ ，得出 $x = -1 - \frac{2}{a-1}$ ，

x 是整数， $a-1 = \pm 1$ 或 ± 2 ，

$\therefore a = -1, 0, 2, 3$ ；

由①、②得符合条件的整数 a 有 $-1, 0, 1, 2, 3$ ，共5个。

故答案为：B。

【标注】【知识点】整数根-分离常数法

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (2+2a)x + a + 2 = 0 (a \neq 0)$ 。

(1) 求证：此方程总有两个不相等的实数根。

(2) 若此方程的两个根都为整数，求整数 a 的值。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $a = \pm 1$ 或 $a = \pm 2$ 。

【解析】(1) $\Delta = (2+2a)^2 - 4a(a+2) = 4 + 8a + 4a^2 - 4a^2 - 8a = 4$ 。

$\therefore \Delta = 4 > 0$ ，

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根。

(2) $\therefore ax^2 + (2+2a)x + a + 2 = (x+1)(ax + a + 2) = 0$ ，

$\therefore x_1 = -1, x_2 = -\frac{a+2}{a} = -1 - \frac{2}{a}$ 。

$\therefore$ 方程的根均为整数，

$\therefore a = \pm 1$ 或 $a = \pm 2$ 。

【标注】【知识点】整数根-分离常数法

20. 已知关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 2 - m = 0 (m \neq 0)$ 。

(1) 证明：不论 m 为何值时，方程总有实数根。

(2) 当 m 为何整数时，方程有两个不相等的非负整数根。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 2 .

【解析】(1) $\Delta = (-2)^2 - 4m(2-m) = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m-1)^2 \geq 0$ 恒成立，
 $\therefore$ 不论 m 为何值时，关于 x 的二次方程总有实数根 .

(2) 由题意得， $m \neq 0$ ，

由 $mx^2 - 2x + 2 - m = 0$ 得 $(x-1)[mx - (2-m)] = 0$ ，

$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{2-m}{m} = \frac{2}{m} - 1$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的非负整数根，

$\therefore \frac{2}{m} - 1$ 为非负整数且 $\frac{2}{m} - 1 \neq 1$ ，

$\therefore \frac{2}{m} - 1 \geq 0$ 且 $m \neq 1$ ，

$\therefore \frac{2}{m} \geq 1$ 且 $m \neq 1$ ，

$\therefore 0 < m \leq 2$ 且 $m \neq 1$ ，

又 $\frac{2}{m} - 1$ 为整数， m 为整数，

$\therefore m = 2$.

【标注】【知识点】整数根-分离常数法

二、一元二次方程的根系关系

练习

21. 设方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根分别是 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2$ 的值为 () .

- A. 3 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. -2

【答案】A

【解析】根据韦达定理知： $x_1 + x_2 = 3$.

故选A .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

22. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根，则 $x_1 + x_2 - x_1x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】4

【解析】 $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 3 - (-1) = 4.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

23. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两个根，且 $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】3

【解析】 $\because x_1$ 和 x_2 是一元二次方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两根，

$$\text{且 } x_1 + x_2 = 4,$$

$$\therefore -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = 4, \text{ 即 } m = 4,$$

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3.$$

故答案为：3 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + 3 = 0$ 有两个实数根 $x_1 = 1, x_2 = n$ ，则代数式 $(m + n)^{2020}$ 的值为 () .

A. 0

B. 1

C. 3^{2020}

D. 7^{2020}

【答案】B

【解析】 $\because x_1 = 1, x_2 = n$ 是 $x^2 + mx + 3 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -m \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1 \cdot n = 3 \\ 1 + n = -m \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = -4 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\therefore (m + n)^{2020} = (-4 + 3)^{2020}$$

$$= (-1)^{2020}$$

$$= 1.$$

故选B .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

25. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且满足

$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$, 则 k 的值为 () .

A. -1

B. $\frac{3}{4}$

C. -1 或 $\frac{3}{4}$

D. 不存在

【答案】B

【解析】 $\because$ 一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = 4k^2 - 3,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = x_1 x_2,$$

$$\therefore -k = 4k^2 - 3,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{4} \text{ 或 } -1,$$

$\because$ 方程有两个实根,

$$\therefore \Delta = k^2 - 4(4k^2 - 3) \geq 0,$$

$$\therefore k^2 \leq \frac{4}{5},$$

$\therefore k = -1$ 不符合题意, 舍去,

$$\therefore k = \frac{3}{4},$$

故选: B.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

26. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两实数根之积为负, 则 m 的取值范围 _____ .

【答案】 $m > \frac{1}{2}$

【解析】设 x_1, x_2 为方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\text{由已知得: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 8m \geq 0 \\ -2m + 1 < 0 \end{cases}.$$

$$\text{解得: } m > \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

27. 已知方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 的一个根是1, 则它的另一个根是 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because x_1 \cdot x_2 = 2, x_1 = 1,$
 $\therefore x_2 = 2.$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

28. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + 12 = 0$ 的一根为 $x = -3$, 求 m 的值以及方程的另一根.

【答案】 $m = -7$, 另一根 $x = -4$.

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + 12 = 0$ 的一根为 $x = -3$,
 $\therefore (-3)^2 - (-3)m + 12 = 0$, 即 $9 + 3m + 12 = 0$,
 $3m = -21, m = -7$,
 $\therefore$ 原方程为 $x^2 + 7x + 12 = 0$,
由韦达定理可知 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,
 $\therefore -3 + x = -\frac{7}{1}$, 即 $x = -4$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

29. 一元二次方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根为-1和3, 则 m 的值是() .

A. -3

B. 3

C. -2

D. 2

【答案】 C

【解析】 根据题意得 $-1 + 3 = -m$,
所以 $m = -2$.
故选: C.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

|| 练习

30. 已知 α, β 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha$ 的值为 _____ .

【答案】 0

【解析】 $\alpha^2 + 2\alpha - 5 = 0$, $\alpha\beta = -5$, 即 $\alpha^2 + 2\alpha = 5$, $\alpha\beta = -5$,
原式 $= (\alpha^2 + 2\alpha) + \alpha\beta = 5 + (-5) = 0$.

【标注】 【知识点】 一元二次方程根与系数的关系

31. 若 a, b 是方程 $x^2 + 2x - 2006 = 0$ 的两根, 则 $a^2 + 3a + b = ()$.

A. 2006

B. 2005

C. 2004

D. 2002

【答案】 C

【解析】 $\because a, b$ 是方程 $x^2 + 2x - 2006 = 0$ 的两根,

$$\therefore x^2 + 2x = 2006, a + b = -2$$

$$\text{则 } a^2 + 3a + b$$

$$= a^2 + 2a + a + b$$

$$= 2006 - 2$$

$$= 2004$$

故选: C .

【标注】 【知识点】 一元二次方程根与系数的关系

32. 设 a, b 是方程 $x^2 + 2016x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $(1 + 2018a + a^2)(1 + 2018b + b^2)$ 的值为 () .

A. 2017

B. 4

C. 2016

D. -4

【答案】 B

【解析】 $\because a, b$ 是方程 $x^2 + 2016x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则代入可得:

$$a^2 + 2016a + 1 = 0, b^2 + 2016b + 1 = 0,$$

$$\text{原式} = (1 + 2018a + a^2)(1 + 2018b + b^2)$$

$$= (a^2 + 2016a + 1 + 2a)(b^2 + 2016b + 1 + 2b)$$

$$= (0 + 2a)(0 + 2b)$$

$$= 4ab,$$

$$\text{由韦达定理可知, } x_1 \cdot x_2 = a \cdot b = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\therefore 4ab = 4, \text{ 即原式} = 4.$$

故选B.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

33. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两根, 且 $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$, 则 $a =$ _____.

【答案】8

【解析】根据题意得 $x_1 + x_2 = -4, x_1x_2 = -3$,
所以原式化简得 $-6(x_1 + x_2) + 10x_1x_2 + a = 2$,
代入可得 $a = 8$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

34. 若 a, b 是一元二次方程 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的两根, 则 $a^3 + 2017b - 2016 =$ _____.

【答案】2017

【解析】 $\because a$ 是 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的实数根,
 $\therefore a^2 = a + 2016$,
 $\therefore a^3 = a^2 + 2016a = a + 2016 + 2016a = 2017a + 2016$,
 $\therefore$ 原式 $= 2017(a + b)$,
 $\because a, b$ 是 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的两个实数根,
 $\therefore a + b = 1$,
 $\therefore$ 原式 $= 2017$.

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

|| 练习

35. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 7x + 4 = 0$ 的两根是 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为().
A. $-\frac{7}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$ D. $\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$

【答案】A

【解析】 $\because x^2 + 7x + 4 = 0$ 的两根是 x_1, x_2 ,

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}, \\ \therefore \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}} \\ = \frac{x_1 x_2}{-7} \\ = \frac{4}{-7} \\ = -\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

故选A.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

36. 若 α, β 是方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值为().

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

【答案】C

【解析】根据题意得 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$,

$$\text{所以 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-2) = 8.$$

故选C.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

37. 设关于 x 的方程 $2x^2 + kx + 2 = 0$ 的两根分别为 α, β , 且 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, 则 k 等于().

- A. 2 B. -4 C. 4 D. -2

【答案】B

【解析】 $2x^2 + kx + 2 = 0$,

$$\alpha + \beta = -\frac{k}{2},$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta},$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta},$$

$$\frac{k^2}{4} - 2 = -\frac{k}{2},$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0,$$

$$k_1 = 2, k_2 = -4,$$

$$\Delta = k^2 - 4 \times 2 \times 2 \geq 0,$$

$$k^2 \geq 16,$$

$$k = -4.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

38. 已知 a, b 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的两个根, 则代数式 $|a - b|$ 的值为 _____ .

【答案】3

【解析】根据题意得 $a + b = 1, ab = -2$,

$$\text{所以 } |a - b| = \sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{1 - 4 \times (-2)} = 3.$$

故答案为3.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

39. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个实数根.

则:

(1) $x_1^2 + x_2^2 =$ _____ .

(2) $x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 =$ _____ .

(3) $x_1 - x_2 =$ _____ .

(4) $x_1^2 - x_2^2 =$ _____ .

(5) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) =$ _____ .

(6) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} =$ _____ .

(7) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} =$ _____ .

(8) $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} =$ _____ .

(9) $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} =$ _____ .

【答案】(1) 7

(2) 8

(3) $\pm\sqrt{5}$

(4) $\pm 3\sqrt{5}$

(5) -1

(6) 7

(7) $\pm\sqrt{5}$

$$(8) \pm 3\sqrt{5}$$

$$(9) 3$$

【解析】(1) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= 7.$$

(2) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2$$

$$= 8.$$

(3) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$(x_1 - x_2)^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$= 5,$$

$$\text{则 } x_1 - x_2 = \pm\sqrt{5}.$$

(4) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$x_1^2 - x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$= \pm 3\sqrt{5}.$$

(5) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2)$$

$$= x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4$$

$$= -1.$$

(6) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2$$

$$= 7.$$

(7) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \pm\sqrt{5}. \\
(8) \text{ 易知 } &\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \\
&\frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1^2}{x_2^2} - \frac{x_2^2}{x_1^2}} \\
&= \frac{\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)(x_2 - x_1)}}{x_1 x_2} \\
&= \pm 3\sqrt{5}. \\
(9) \text{ 易知 } &\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \\
&\left(\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} + \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \right)^2 \\
&= \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + 2 \\
&= 9, \\
&\text{则 } \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} + \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = 3.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

40. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m-3)x - m = 0$,

(1) 求证：方程有两个不相等的实数根.

(2) 如果方程的两实根为 x_1 、 x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$ ，求 m 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 1, 2.

【解析】(1) $\because \Delta = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$ 变形可得 $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7$,

利用韦达定理代入可求得 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

故答案为：1, 2.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

41. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(k-1)x + k^2 = 0$ 有两个实数根 x_1 , x_2 .

(1) 求实数 k 的取值范围.

(2) 若 $|x_1 + x_2| = x_1 \cdot x_2 - 1$ ，求实数 k 的值.

【答案】(1) $k \leq \frac{1}{2}$.

(2) -3 .

【解析】(1) 由方程有两个实数根, 可得:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\&= 4(k-1)^2 - 4k^2 \\&= 4k^2 - 8k + 4 - 4k^2 \\&= -8k + 4 \geq 0,\end{aligned}$$

$$\text{解得: } k \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围是 } k \leq \frac{1}{2}.$$

(2) 依据题意可得, $x_1 + x_2 = 2(k-1)$, $x_1 x_2 = k^2$,

$$\text{有 (1) 可知 } k \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore 2(k-1) < 0, x_1 + x_2 < 0,$$

$$\therefore -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = x_1 + x_1 - 1,$$

$$\therefore -2(k-1) = k^2 - 1,$$

$$\text{解得 } k_1 = 1 \text{ (舍去)}, k_2 = -3.$$

$$\therefore k \text{ 的值是 } -3.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

42. 若关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 则 $x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + 3m - 2) \geq 0, \text{ 解得 } m \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{由韦达定理可知 } x_1 + x_2 = -2m, x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3m - 2.$$

$$x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$$

$$= x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2$$

$$= (-2m)^2 - m^2 - 3m + 2$$

$$= 3m^2 - 3m + 2$$

$$= 3\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$

$$\therefore m \leq \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, 取得最小值为 } \frac{5}{4}.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

43. 已知 α, β 是一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个根, 则 $2\alpha^5 + 5\beta^3$ 的值为 _____ .

【答案】 -21

【解析】 $\because \alpha$ 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根,

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \text{ 即 } \alpha^2 = 1 - \alpha.$$

$$\alpha^4 = (1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 2 - 3\alpha,$$

$$\alpha^5 = \alpha^4 \cdot \alpha = (2 - 3\alpha)\alpha = 2\alpha - 3\alpha^2 = 5\alpha - 3.$$

$$\text{同理 } \beta^3 = \beta^2 \cdot \beta = (1 - \beta)\beta = \beta - \beta^2 = 2\beta - 1.$$

$$\therefore 2\alpha^5 + 5\beta^3 = 2(5\alpha - 3) + 5(2\beta - 1) = 10(\alpha + \beta) - 11 = -21.$$

故答案为: -21.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

练习

44. 设实数 a, b 满足 $3a^2 - 19a + 1 = 0$ 且 $3b^2 + 19b + 1 = 0$, 求 $a + b$ 的值.

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{349}}{3}.$

【解析】 $\because 3(-b)^2 - 19(-b) + 1 = 0,$

$\therefore a, -b$ 是 $3x^2 - 19x + 1 = 0$ 的根,

$$\text{① } a = -b \Rightarrow a + b = 0;$$

$$\text{② } a \neq -b,$$

由韦达定理得

$$\begin{cases} a + (-b) = \frac{19}{3} \\ a \cdot (-b) = \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = \left(\frac{19}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = \frac{349}{9},$$

$$\therefore a + b = \pm \frac{\sqrt{349}}{3}.$$

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

45. 已知 a 、 b 满足 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ， $b^2 - 2b - 5 = 0$ ，且 $a \neq b$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 3$ 的值是（ ）.
- A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

【答案】A

【解析】 $\because a$ 、 b 满足 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ， $b^2 - 2b - 5 = 0$ ，且 $a \neq b$ ，

$\therefore a$ 、 b 可以看作方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个根，

$\therefore a + b = 2$ ， $ab = -5$ ，

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 3 = \frac{b^2 + a^2}{ab} + 3 = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 3 = \frac{2^2 + 10}{-5} + 3 = \frac{1}{5}.$$

故选A.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

46. 若实数 a 、 b 满足 $a^2 + 3a = 2$ ， $b^2 + 3b = 2$ ，且 $a \neq b$ ，则 $(1 + a^2)(1 + b^2) =$ （ ）.
- A. 18 B. 12 C. 9 D. 6

【答案】A

【解析】依题意， a 、 b 为方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 的两个不同实根.

因此，由韦达定理，得 $a + b = -3$ ， $ab = -2$.

$$\begin{aligned}(1 + a^2)(1 + b^2) &= (1 + 2 - 3a)(1 + 2 - 3b) = 9(1 - a)(1 - b) \\ &= 9[1 - (a + b) + ab] = 9 \times (1 + 3 - 2) = 18.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

47. 如果实数 $a \neq b$ 满足 $(a + 1)^2 = 3 - 3(a + 1)$ ， $3(b + 1) = 3 - (b + 1)^2$ ，那么 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值为_____.

【答案】23

【解析】设 $(a + 1)$ 、 $(b + 1)$ 是方程 $x^2 + 3x - 3 = 0$ 的两个根，

$$\therefore (a + 1) + (b + 1) = -3, (a + 1)(b + 1) = -3,$$

$$\therefore a + b = -5, ab = 1.$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= \frac{a^2 + b^2}{ab} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \\ &= 23.\end{aligned}$$

故答案为：23 .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

48. 若两个不等实数 m, n 满足 $m^2 - 2m = a, n^2 - 2n = a, m^2 + n^2 = 5$, 则 $m - n$ 的值为 _____ .

【答案】 $\pm\sqrt{6}$

【解析】 略 .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

49. 已知 $a \neq b$, 且 $a^2 - 13a + 1 = 0, b^2 - 13b + 1 = 0$, 那么 $\frac{b}{1+b} + \frac{a^2+a}{a^2+2a+1} =$ _____ .

【答案】 1

【解析】 由题意得 a, b 是 $x^2 - 13x + 1 = 0$ 的两根, 那么 $a + b = 13, ab = 1$.

$$\therefore \text{原式} = \frac{b}{1+b} + \frac{a(a+1)}{(a+1)^2} = \frac{b}{1+b} + \frac{a}{a+1} = \frac{2ab + (a+b)}{(a+b) + 1 + ab} = 1.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

50. 若 $ab \neq 1$, 且有 $3a^2 + 123456789a + 2 = 0, 2b^2 + 123456789b + 3 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 显然 a 和 $\frac{1}{b}$ 是方程 $3x^2 + 123456789x + 2 = 0$ 的两个不同实根, 故 $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

51.

若 $ab \neq 1$, 且 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$, $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{ab+a+1}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$. (填小数形式)

【答案】 -398.4

【解析】 由 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ 得 , $5\frac{1}{b^2} + 2001\frac{1}{b} + 9 = 0$, 又 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$, 所以 $a, \frac{1}{b}$ 可以看作是方程 $5x^2 + 2001x + 9 = 0$ 的两个根 .
由韦达定理 , 得 : $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{9}{5}$, $a + \frac{1}{b} = -\frac{2001}{5}$;
故 $\frac{ab+a+1}{b} = -\frac{1992}{5} = -398.4$.
故答案为 : -398.4 .

【标注】 【知识点】 利用构造的方程求解

52. 设 a, b, c, d 为互不相等的正实数 , 且 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = 1$, $(b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = 1$, 则 $a^2b^2 - c^2d^2 = (\quad)$.
A. 0 B. -1 C. 1 D. 无法确定

【答案】 B

【解析】 a^2, b^2 是方程 $(x - c^2)(x - d^2) = 1$ 的两个根 ,
展开得 $x^2 - (c^2 + d^2)x + c^2d^2 - 1 = 0$.
由根与系数的关系得 $a^2b^2 = c^2d^2 - 1$. 故 $a^2b^2 - c^2d^2 = -1$,
选 B .

【标注】 【知识点】 利用构造的方程求解

|| 独步天下

53. 已知 x, y 是正整数 , 并且 $xy + x + y = 23$, $x^2y + xy^2 = 120$, 求 $x^2 + y^2$ 的值 .

【答案】 34 .

【解析】 方法一 : 由于 $xy + (x + y) = 23$, $xy \cdot (x + y) = 120$,
则 xy 与 $(x + y)$ 为方程 $t^2 - 23t + 120 = 0$ 的两个根 , 得到 $t_1 = 8$, $t_2 = 15$
即 $xy = 8$, $x + y = 15$ ① ;
或者 $xy = 15$, $x + y = 8$ ② ;

①的时候 x, y 为方程 $u^2 - 15u + 8 = 0$ 的根, $\Delta_1 = 15^2 - 32 = 193$, 不是完全平方数, x, y 不可能为题目中要求的正整数, 舍;

②的时候 xy 为方程 $u^2 - 8u + 15 = 0$ 的根, $u_1 = 3, u_2 = 5$.

$$\text{故 } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 34.$$

方法二: 令 $x + y = s, xy = t$.

$$\text{则 } s + t = 23, st = 120.$$

故可得 s, t 为方程 $x^2 - 23x + 120 = 0$ 的两根,

故可得: $s = 8, t = 15$ 或 $s = 15, t = 8$ (舍去).

$$\text{则: } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2t = 34.$$

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

54. 已知 x, y 都是实数, $x + y + xy = 4, xy^2 + yx^2 = 3$, 求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 =$ _____.

【答案】 55

【解析】 由题意知, $xy, x + y$ 是方程 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 的两根,

$$\text{解得 } \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}, \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

当 $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 时构造方程 $m^2 - m + 3 = 0$ 无解, 舍去,
 $\therefore \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

$$\text{原式} = x^3(x + y) + x^2y^2 + y^3(x + y)$$

$$= (x^3 + y^3)(x + y) + x^2y^2$$

$$= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 1$$

$$= 9[(x + y)^2 - 3xy] + 1$$

$$= 55.$$

故答案为55.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解